**Лекция 12**

*Масса и плотность. Геометрия масс*

Рассмотрим сплошную связную неизменяемую механическую систему и жестко связанное с ней подвижное пространство с репером , и D область в подвижном пространстве, занимаемая этой механической системой. Любую точку M можно задать радиус вектором (или же её координатами).

Если в области D задана скалярная неотрицательная функция µ, то будем говорить, что на рассматриваемой механической системе задано распределение масс (плотность).

Твердое тело - сплошная связная неизменяемая механическая система с заданным распределением масс на ней.

Если функция плотности тела непрерывна в заданной области, то: можно ввести в рассмотрение величина, называемыми *моментами порядка α=i+j+k*:

Момент нулевого порядка (i=j=k=0) – *масса твёрдого тела.*

*Геометрические характеристики* (зависят только от распределения масс и не меняются во времни):

* *Осевые моменты*:
* *Произведение инерции (центробежные моменты инерции твёрдого тела):*
* *Центр масс C –* характеристика распределения масс твёрдого тела. Радиус вектор точки центра масс определяется равенством: , т.е. координаты этой точки определяются следующими формулами:

Моментом инерции материальной точки относительно оси *l* – величина , где m – масса точки, а h – расстояние до оси *l*. Моментом инерции твердого тела относительно оси *l* – величина , где D – область подвижного пространства, занимаемая телом, µ - плотность тела, h – расстояние от точки M (принадлежащей области D) с координатами x,y,z, до оси *l*.

Для того, чтобы момент инерции материальной точки массы *m* относительно оси *l* был равен моменту инерции твердого тела той же массы относительно той же оси, эта точка должна находиться на расстоянии от *l*. Эта величина называется *радиусом инерции твёрдого тела относительно оси l.*

**Теорема** (Гюйгенс – Штейнер): Если – ось, проходящая через центр масс C твёрдого телапараллельно оси *l* на расстоянии *d* от неё, то , где , – моменты инерции твёрдого тела относительно осе й *l* и , а *m* – масса этого тела.

**Теорема:** Если *l* – ось,, проходящая через начало O репера , а – её направляющие косинусы в этом репере, то , где - момент инерции твердого тела относительно оси *l*, а , ,,,, – осевые и центробежные моменты инерции этого тела.

Пусть . Запишем матрицу квадратичной формы формулы :

В случае, если – единичный вектор вдоль оси *l*, то равенство можно переписать в виде: .

Тензорными оказываются преобразования элементов матрицы , соответствующие всевозможным преобразованиям базисов по формулам: , где – репер, полученный из репера в результате поворота в подвижном точечном пространстве. Таблица в заданном базисе вместе с формулами ее преобразования к любому другому базису задает тензор второго ранга, который называют *тензором твёрдого тела для точки O.* В заданном репере , матрица является матрицей некоторого линейного оператора в R3, его называют *оператором инерции твёрдого тела*  в этом репере.

Рассмотрим пучок всех прямых (осей), проходящих через точку O. Относительно каждой оси *l* пучка данное твёрдое тело имеет свой момент инерции . Картину распределения момента инерции твердого тела в зависимости от выбора оси пучка дает *эллипсоид инерции*.

Если на каждой из осей *l* пучка выберем точку M с координатами x,y,z такую, что расстояние до точки O равно . Таким образом . Получим уравнение *эллипсоида инерции твёрдого тела в точке O*:

Наименьшая (наибольшая) из главных осей эллипсоида инерции – та его главная ось, которой соответствует наименьший (наибольший) из его главных диаметров. Наименьший момент инерции тело имеет относительно наибольшей оси его эллипсоида инерции, а наибольший — относительно наименьшей оси этого эллипсоида. Главные оси эллипсоида называют *главными осями инерции твердого тела* для точки O. В случае, когда орты репера направлены по главным осям эллипсоида инерции, то центробежные моменты инерции равны нулю, а осевые моменты инерции равны моментам инерции относительно главных осей, — их называют главными моментами инерции твердого тела для точки O. В данном репере уравнение эллипсоида принимает вид: . Если начало O репера совпадает с центром масс C твердого тела, то эллипсоид инерции называют его *центральным эллипсоидом инерции*, его главные оси называют *главными центральными осями инерции*, а величины , , — его *главными центральными моментами инерции*.

*Основные законы динамики твердого тела*

Зададим неподвижный репер и подвижный репер , жестко связанный с телом, ξ, η, ζ и x, y, z – координаты точки M твёрдого тела в этих реперах. Пусть – радиус вектор, – скорость, – величина скорости этой точки твёрдого тела в неподвижном репере, , - радиус-вектор и скорость некоторой точки A (полюса) в этом же репере. Если µ = µ(x, y, z) — распределение масс твердого тела, то его *количество движения* , *кинетический момент относительно полюса А и кинетическую энергию T твёрдого тела* определяют формулами:

,

,

Так как подынтегральные выражения в этих формулах зависят от скоростей точек твердого тела, а распределение скоростей этих точек дается формулой Эйлера, то используя эту формулу можно преобразовать выражения для этих величин.

Пусть и – координаты векторов и (кинетический момент твёрдого тела относительно неподвижной точки) в подвижном репере. Проектируя на орты подвижного репера, получаем:

Таким образом . В главных осях инерции для точки O матрица оператора J диагональна.

*Закон (теорема) о движении центра масс твердого тела*: , где – радиус-вектор центра масс твёрдого тела, *m –* его масса, а – главный вектор действующих на него сил. Таким образом, центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе этого твердого тела, под действием силы, равной главному вектору действующих на него сил.

*Закон (теорема) об изменении главного вектора количества движения твердого тела:* , где – количество движения твёрдого тела, , а – главный вектор сил, действующих на твёрдое тело.

*Закон (теорема) об изменении кинетического момента твердого тела -* производная кинетического момента этого тела относительно подвижного полюса A и главный момент , действующих на тело внешних сил относительно того же полюса связаны равенством: , где – радиус вектор центра масс тела, , – радиус вектор и ускорение полюса A, а *m* – масса тела.

*Закон (теорема) об изменении кинетической энергии твердого тела*: , *T* - кинетическая энергия твердого тела в момент времени *t*, , а – работа всех сил, действующих на тело, на промежутке времени [t0, t].